高次元　矩形比と黄金比　　　　　　　　　　　　　　　蛭子井博孝

n次元等分割直方体とその一般化

蛭子井博孝

卵形線研究センター

740-0012　岩国市元町4丁目12-10

E-mail　hirotaka.ebisui@crux.ocn.ne.jp

On n-Dim rectangle devided equally and its generalization

Hirotaka Ebisui

Oval Research Center,　Motomachi 4-12-10 Iwakunisi 740-0012 , JAPAN

Abstract : The 2-dimensional rectangle whose edges have golden section 1:(1+sqrt(5))/2, are extended to a n-dimensional rectangle by Ebisui. Another problem is to extend the rectangle, whose edges have the ratio 1:sqrt(2), to n-dimensional rectangle, whose edges satisfy the equation

$$1:x_1:x_2:\ldots:x_{n-1}=\frac{x_1}{2}:\frac{x_2}{2}:\ldots:\frac{x_{n-1}}{2}:1$$

The length of the k th edge is $2^{(\frac{k}{n})}$ (k=0...n-1).

This result is generalized to the case with edge ratio : $1:x_1:x_2:\ldots:x_{n-1}=\frac{x_1}{b_1}:\frac{x_2}{b_2}:\ldots:\frac{x_{n-1}}{b_{n-1}}:1$

Values of x_k (k=1... n-1) is obtained. And some figures of 4-dim case are shown.

Keywords: Hyper rectangle, A4 form, Golden section, Similarity

1 はしがき

長方形の代表としてテレホンカードのような黄金比の辺を持つものがあり、また、Ａ４用紙のように半分にしたとき、元と相似なものがある。このような長方形を、３次元化して、同じような性質の直方体を考えてみた。なお、黄金比を辺にもつ長方形の拡張については、以前報告している[1]。

2　A4用紙の形の一般化、空間化

Ａ４用紙の縦を 1、横を x_1 とすると、$1:x_1=\frac{x_1}{2}:1$ を満たす。これを解けば $x_1=\sqrt{2}$ である。同じ性質を持つ 3 次元直方体の辺を $\mathbf{1}, x_1, x_2$ とし、1 はそのままで、x_1,x_2 をそれぞれ 2 等分した図形が元の立体図形と相似であるものとする。このことを式で表すと

$$1:x_1:x_2=\frac{x_1}{2}:\frac{x_2}{2}:1 \qquad \text{. . . (1)}$$

となり、これを変形すると、それぞれの項の比が等しいことから、

$$\frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{2x_1}=\frac{1}{x_2}$$

この 2 元連立方程式を解くと $x_1=\sqrt[3]{2}, x_2=(\sqrt[3]{2})^2$ である。このような辺を持つ直方体を、辺２等分直方体と呼ぶことにする。また、 x_2 の値は元の直方体と二等分にした直方体との辺の比であり、相似比と呼ばれる。図１、図２は、これを図示したものである。

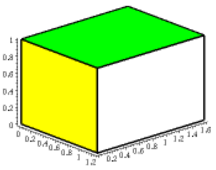


図１　辺２等分直方体

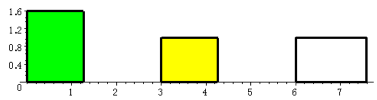


図２　辺２等分直方体の３側面

次に、図３のように x_1, x_2 をそれぞれ、3 等分した図形が、元の立体図形と相似なものを考える。式は

$$1:x_1:x_2=\frac{x_1}{3}:\frac{x_2}{3}:1 \qquad (2)$$

となり、解は $x_1=\sqrt[3]{3}, x_2=(\sqrt[3]{3})^2$ である。

この直方体（辺３等分直方体）と、その異なる３つの側面を、図４，図５に示す。

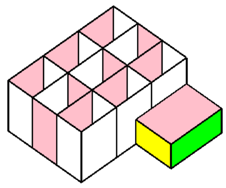


図３　直方体の３×３等分

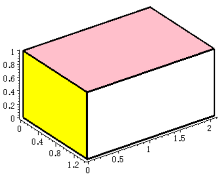


図４　辺３等分直方体

図５　辺３等分直方体の３側面

次に　辺を 4 等分する場合を考えよう。これは、2 次元では、畳と同じ 1 : 2 の図形である。なぜなら 1:x=x/4:1 、x ＝２であるからである。3 次元では、(1) 式の２で割るところを４にする。その結果、３辺は１， $\sqrt[3]{4}$,$(\sqrt[3]{4})^2$ になる。この直方体の形は、図６図７のようになる。

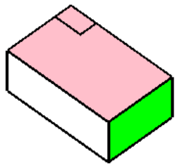


図６　辺４等分直方体

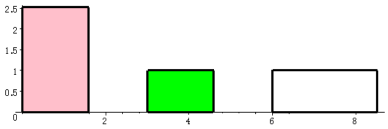


図７　辺４等分直方体の３側面

上記の辺２等分、辺３等分、辺４等分の３つの直方体を相似の位置において示したのが図８である。

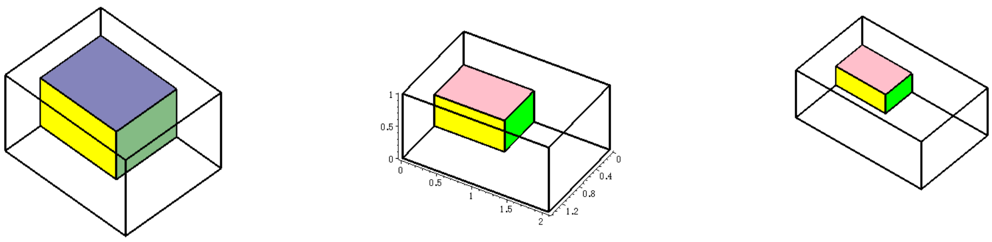


図８　辺２等分、辺３等分、辺４等分の３つの直方体を相似の位置に置く

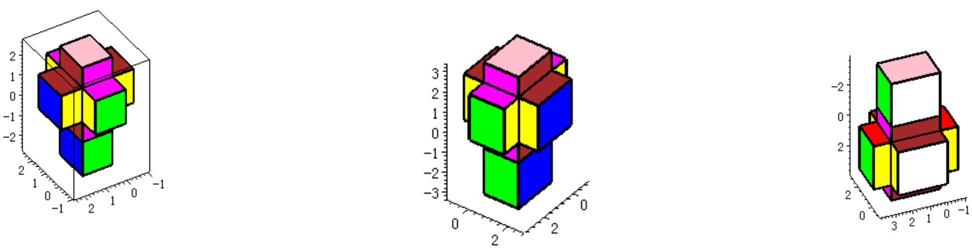
一般に、ｎ次元直方体の１辺を１とし、残りの各辺をｂ等分したとき、元と相似になるとすると、次の式が成り立つ。

$$\mathbf{1} : x_1 : x_2 : \ldots : x_{n-1} = \frac{x_1}{b} : \frac{x_2}{b} : \ldots : \frac{x_{n-1}}{b} : \mathbf{1} \qquad (3)$$

この解は $x_k = b^{k/n}$　　（ｋ＝１．．n-1）　　（４）

である。このとき、x_{n-1} の値すなわち相似比は、$b^{(n-1)/n}$ である。

上の３種の直方体を、４次元に拡張したものは、その３次元展開図を用いると、図９のようになる。



（a）辺２等分直方体　（b）　辺３等分直方体　（c）辺４等分直方体

図９　４次元ｂ分割直方体の３次元への展開図

3．分割の一般化とその解

ここで、1辺を除いた各辺の等分割をさらに拡張し、各辺をそれぞれb_1，b_2, . . . ,b_{n-1}等分する。つまり、次の式が成立するものを考える

$$1 : x_1 : x_2 : \ldots : x_{n-1} = \frac{x_1}{b_1} : \frac{x_2}{b_2} : \ldots : \frac{x_{n-1}}{b_{n-1}} : 1 \qquad (5)$$

これを解くと　$X_k = \prod_{j=1}^{k} [\{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^{\frac{-1}{n}}\} \times b_j]$　　（k=1... n-1）　　（６）

例えば　$b_1=4$, $b_2=3$, $b_3=2$　のとき４辺は

$1 \quad 4(24)^{(-1/4)} \quad (24)^{(1/2)}/2 \quad (24)^{(1/4)}$

である。この場合の３次元展開図を図１０に示す

なお、ここまでの図は、すべて科学技術ソフト Maple を用いた。

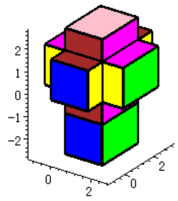


図１０　分割（４，３，２）

４．一般解の数値例

ここでは、式（４）の数値例を代数式値と近似値(小数点以下 3 桁まで 4 桁目 4 捨 5 入)で示す。b=2 ～ 5　ｎ＝２～５　　ｎ次元では，ｎ個の辺の比である。

ｂ＼ｎ	2 次元	3 次元	4 次元	5 次元
2 分割	$1:\sqrt[2]{2}$	$1:\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{2^2}$	$1:\sqrt[4]{2}:\sqrt[4]{2^2}:\sqrt[4]{2^3}$	$1:\sqrt[5]{2}:\sqrt[5]{2^2}:\sqrt[5]{2^3}:\sqrt[5]{2^4}$
	1:1.414..	1:1.260..:1.587..	1:1.189..:1.414..:1.682..	1:1.149..:1.320..:1.1.516..:1.741..
3 分割	$1:\sqrt[2]{3}$	$1:\sqrt[3]{3}:\sqrt[3]{3^2}$	$1:\sqrt[4]{3}:\sqrt[4]{3^2}:\sqrt[4]{3^3}$	$1:\sqrt[5]{3}:\sqrt[5]{3^2}:\sqrt[5]{3^3}:\sqrt[5]{3^4}$
	1:1.732..	1:1.442..: 2.080..	1:1.316..:1.732..: 2.280..	1:1.246..:1.552..:1.933..: 2.465..
4 分割	$1:\sqrt[2]{4}$	$1:\sqrt[3]{4}:\sqrt[3]{4^2}$	$1:\sqrt[4]{4}:\sqrt[4]{4^2}:\sqrt[4]{4^3}$	$1:\sqrt[5]{4}:\sqrt[5]{4^2}:\sqrt[5]{4^3}:\sqrt[5]{4^4}$
	1: 2	1:1.587..: 2.520..	1:1.414..: 2 : 2.828..	1:1.320..:1.741..: 2.297..: 3.031..
5 分割	$1:\sqrt[2]{5}$	$1:\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{5^2}$	$1:\sqrt[4]{5}:\sqrt[4]{5^2}:\sqrt[4]{5^3}$	$1:\sqrt[5]{5}:\sqrt[5]{5^2}:\sqrt[5]{5^3}:\sqrt[5]{5^4}$
	1: 2.236..	1:1.710..2.924..	1:1.495..: 2.236..: 3.344..	1:1.380..:1.904..: 2.627..: 3.624..

5．結び

黄金比の 3 次元モデルは、京大の宮崎興二先生により考えられ、著者がそれを 4 次元以上に拡張し、数値化を行ったものである。

ここで述べてある A4 図形についても、空間化できないかと宮崎先生によって問いかけられ、著者が定式化を行ったものである。ここで大事な点は、一辺を 1 として残し、残りを等分割したところである。それにより、数列となる辺を持つきれいな超直方体が見つかったのである。基本的には、ｎ次元では、分割数のｎ乗根が用いられる。

ここで、少し興味ある結果として、４次元４等分直方体の辺の比が、

$$1 : 4^{1/4} : 4^{2/4} : 4^{3/4} = 1 : 2^{1/2} : 2 : 2^{3/2}$$

であり、この数値の中に、２次元２等分長方形の辺の比１：２ $^{1/2}$ と、２次元４等分長方形である畳の辺の比１：２とが、4 次元直方体の部分図形である２次元胞の辺の比として、同時に現れている。そのため、その 4 辺の比を、単に、四次元の畳比と呼ぶことにする。また、実際の畳は、縦、横、高さ（厚さ）を持つ 3 次元直方体である。その 3 次元直方体が，ｎ次元 b 等分割直方体のどんな 3 次元部分胞であるか、これからの課題である。

さらに、３節の一般化は、式では解けたが、それがどんな直方体かということが、これからの課題である。また、1 節の 3 次元直方体は、キャラメルの箱に用いるとおもしろいかもしれない。最後に、図示する直方体の投影法について、どれがいいか、これからの課題である。

参考文献

[1]蛭子井　博孝：ｎ次元超直方体の性質とｎ次元へ拡張した黄金比を持つ超直方体、Hyper　Space、高次元科学会、Vol 2, No 3, p.18-23、1993

高次元黄金比

１：x=x－１：１が２次元黄金比　1:(1+5^(1/2))/2 約１：１．６１８
４次元黄金比は、
１：ｘ：ｙ：ｚ＝ｘ－１：ｙ－１：ｚ－１：１
1/(x-1)=x/(y-1)=y/(z-1)=z
ｙ＝ｚ（ｚ－１）
z=1/(x-1)
ｙ－１＝ｘ（ｘ－１）
ｚについてとくと
ｚ＾４＝ｚ＾３＋ｚ＾２＋ｚ＾１＋１
ｚ＝1.927561975
ｙ＝ｚ（ｚ－１）＝1.787933192
ｘ＝１／ｚ＋１＝1.518790064

故に 4 次元黄金比は約　１：１．５１９：１．７８８：１．９２８

1：ｘ１：ｘ２：。。。：ｘｎ=x１－１：ｘ２－１：ｘ３－１：....：xn－1：１
　これをｘｎについてとくと、
Xn^（n＋１）=ｘｎ＾ｎ+xn^(n-1)＋....+xn+ 1
より xn-1,xn-2、、、x1 についてとく